Septième partie:
Systèmes de points matériels, lois de conservation

Notions abordées:

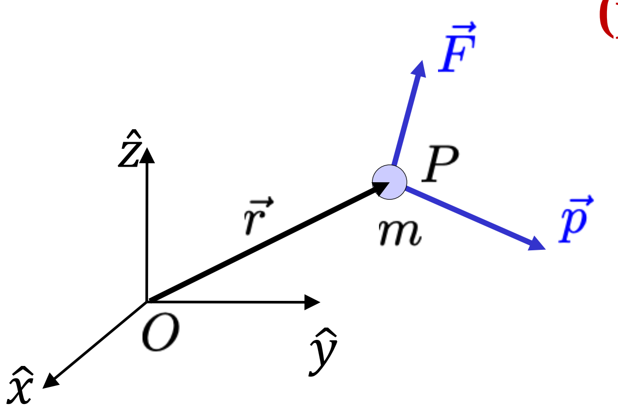
- 7.1 Résumé: 2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique pour un point matériel
- 7.2 Systèmes de points matériels: énoncé général de la 3ème loi de Newton
- 7.3 Statique
- 7.4 Systèmes isolés et lois de conservation
- 7.5 Centre de masse, théorème du centre de masse
- 7.6 “Problème à deux corps”
- 7.7 Chocs et collisions

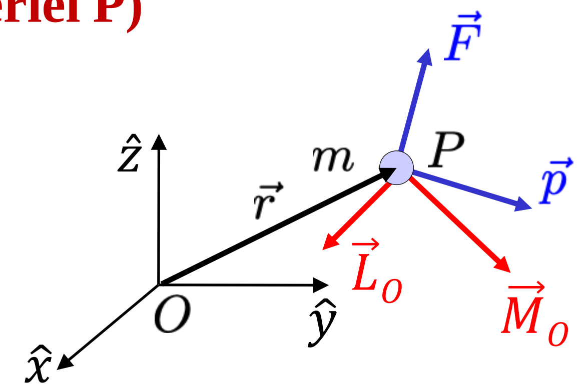
Buts:

- Assimiler et savoir appliquer les lois de la mécanique newtonienne à des systèmes impliquant plusieurs points matériels

7.1 Résumé: 2ème loi et théorème du moment cinétique

(pour un point matériel P)





$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

Résultante des forces:

$$\boxed{\vec{F} = \sum \vec{F}_i}$$

Moment de la résultante des force par rapport à un point O :

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i}$$

= 0 si force centrale

Quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Moment cinétique par rapport au point O :

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

2ème loi de Newton

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

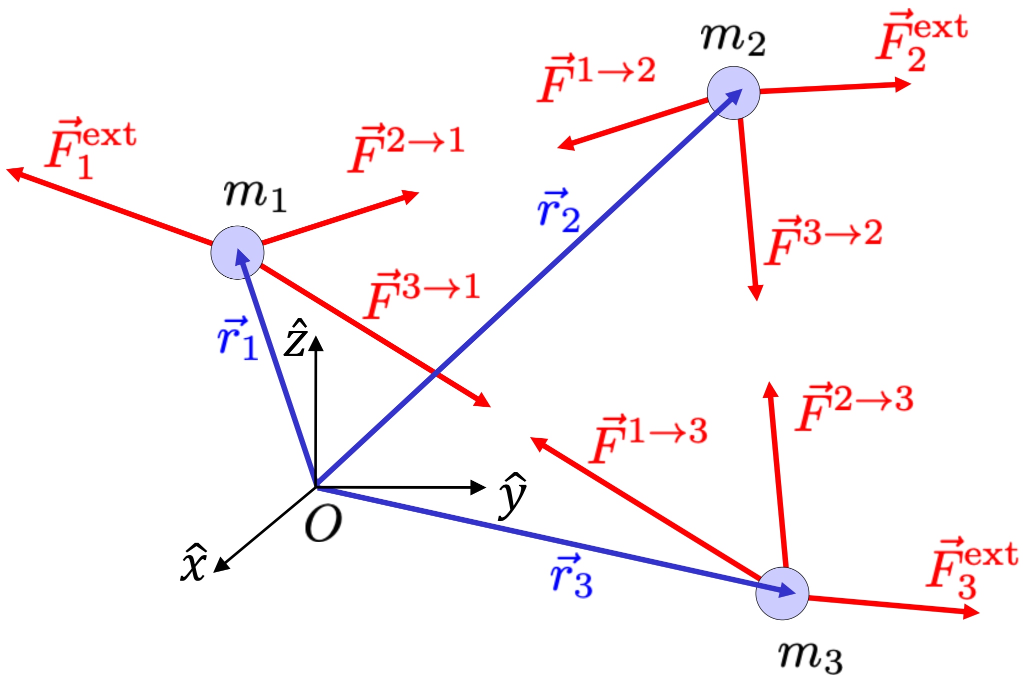
équivalente à $\vec{F} = m\vec{a}$ si m constante

Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O}$$

= 0 si force centrale

7.2 Système de plusieurs points matériels



- On suppose que chaque point matériel P_α du système subit:

  - une résultante des **forces extérieures** F_α^{ext} exercée depuis l'extérieur du système
  - des **forces intérieures** $F^{\beta\to\alpha}$ exercées par les autres points P_β du système (uniquement forces « à deux corps ») $\Rightarrow$ **Troisième loi de Newton**, appliquée à chaque point P_α du système: **action et réaction sont égales, opposées et dirigées selon le vecteur reliant les positions de chaque couple de points matériels**

7.2 Système de plusieurs points matériels

Formulation mathématique de la 3ème loi de Newton:
action et réaction sont égales, opposées et dirigées selon le vecteur reliant les points matériels

$$\vec{F}^{\beta\to\alpha} + \vec{F}^{\alpha\to\beta} = 0$$

$$\vec{M}_O^{\beta\to\alpha} + \vec{M}_O^{\alpha\to\beta} = \vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}^{\beta\to\alpha} + \vec{r}_\beta \wedge \vec{F}^{\alpha\to\beta} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \wedge \vec{F}^{\beta\to\alpha} = 0$$

$$\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta = \vec{r}_{\alpha\beta} \parallel \vec{F}^{\beta\to\alpha}$$

3ème loi de Newton (énoncé générale)

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{F}^{\beta\to\alpha} &= 0 \\ \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{M}^{\beta\to\alpha} &= 0 \end{aligned}}$$

La somme des forces internes est nulle

La somme des moments des forces internes est nulle

7.2 Système de points matériels: eqs de mouvement

- Quantité de mouvement totale: $$\boxed{\vec{p} \equiv \sum_\alpha \vec{p}_\alpha}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_\alpha \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \left(\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{F}^{\beta\to\alpha} + \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha \right) = \underbrace{\sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{F}^{\beta\to\alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_\alpha \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha}_{\equiv \vec{F}^{\text{ext}}}$$

2ème loi de Newton pour P_α

- Moment cinétique total (par rapport à O): $$\boxed{\vec{L}_O \equiv \sum_\alpha \vec{L}_{O,\alpha}}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_\alpha \frac{d\vec{L}_{O,\alpha}}{dt} = \sum_\alpha \left(\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{M}_O^{\beta\to\alpha} + \vec{M}^{\text{ext}}_{O,\alpha} \right) = \underbrace{\sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{M}_O^{\beta\to\alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_\alpha \vec{M}^{\text{ext}}_{O,\alpha}}_{\equiv \vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

Théorème du moment cinétique pour P_α

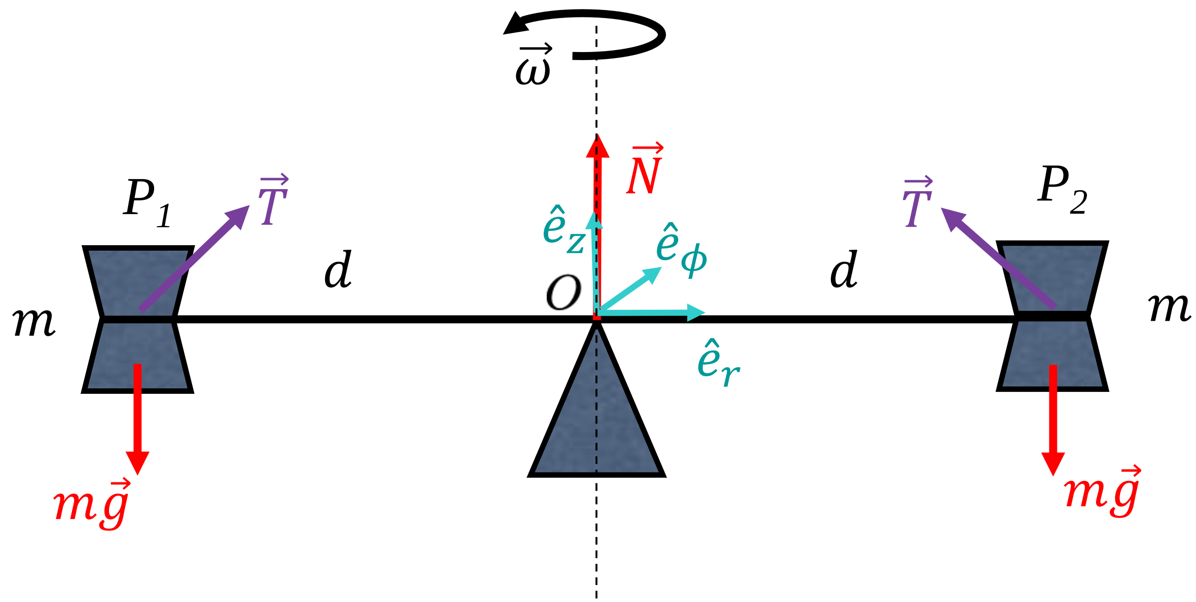
Lois générales de la dynamique pour un système de points matériels

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \qquad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

Seules les forces extérieures déterminent l'évolution:
- de la quantité de mouvement totale
- du moment cinétique total

$$\vec{M}_O^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}$$ avec $\vec{r}_i$ = point d'application de la force $\vec{F}_i^{ext}$

7.2 Ex.: tabouret tournant



$\vec{N} - 2m\vec{g} = 0$ (le tabouret ne se déplace pas)

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 = \omega d\ \hat{e}_\phi$$

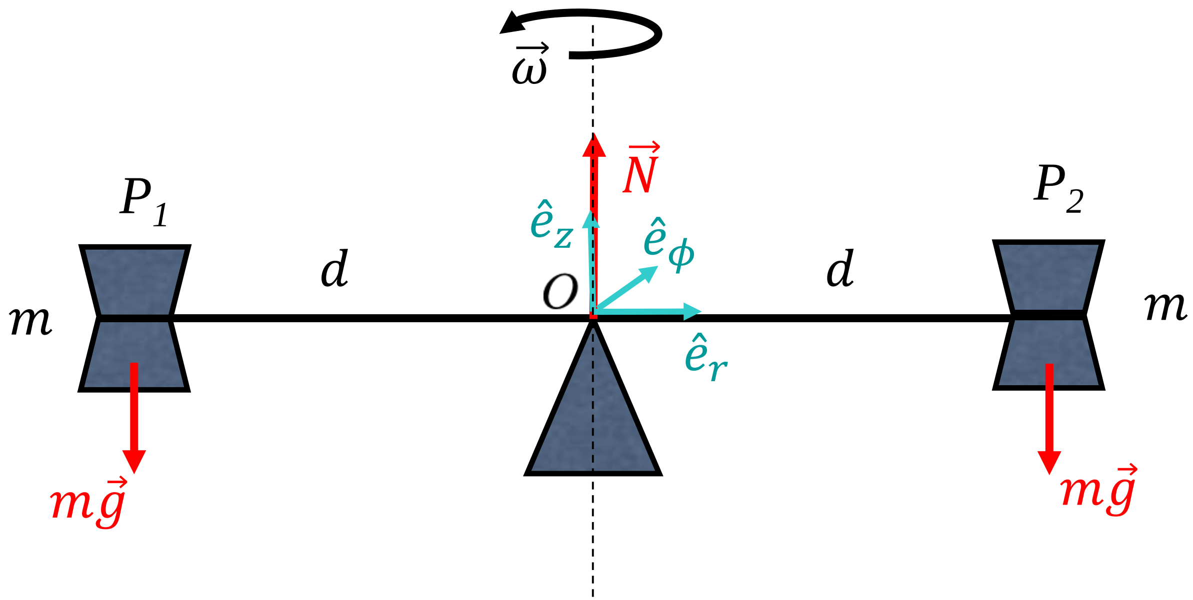
$$\Rightarrow \quad \vec{L}_O = 2d^2 m\omega\ \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad d^2\omega = cste$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$$

Les forces internes entre tiges et masses *m* se compensent

7.2 Ex.: tabouret tournant



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 = \omega d\ \hat{e}_\phi$$

$\Rightarrow$ $$\vec{L}_O = 2d^2 m\omega\ \hat{e}_z$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$$

$\Rightarrow$ $$d^2\omega = cste$$

Pour deux distances *d* et *D* des masses par rapport à *O* on a : $d^2\omega_d = D^2\omega_D$

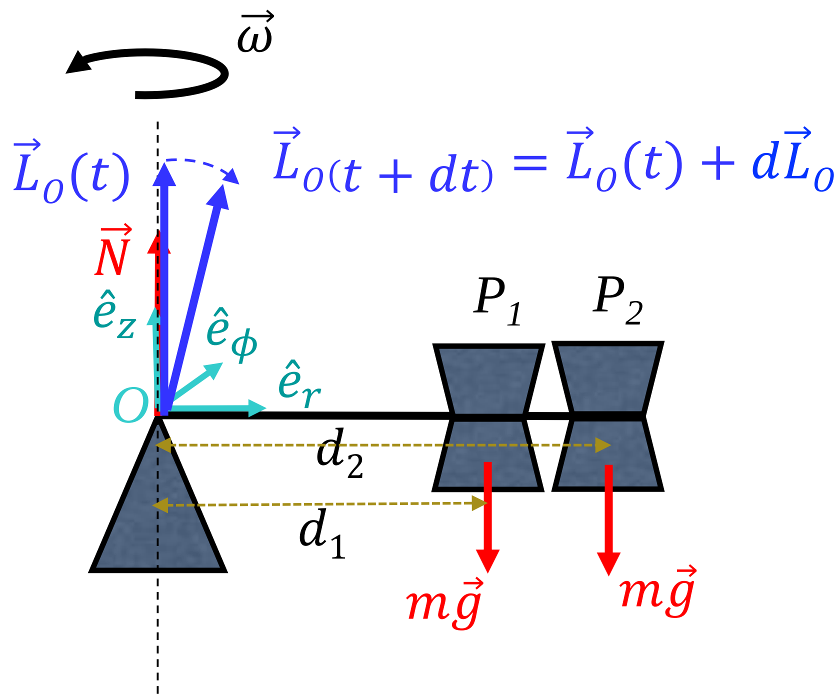
$$E_d = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = md^2\omega_d^2; \qquad E_D = mD^2\omega_D^2$$

$$E_d = md^2\omega_d^2 = md^2\frac{D^4}{d^4}\omega_D^2 = m\frac{D^4}{d^2}\omega_D^2 = \frac{D^2}{d^2}E_D \neq E_D$$

$\Rightarrow$ *E* n'est pas conservée (les forces internes travaillent)

7.2 Ex.: tabouret tournant

Coordonnées cylindrique $O\hat{e}_r\hat{e}_\phi\hat{e}_z$



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$
$$\vec{v}_2 = \omega d_2\, \hat{e}_\phi$$
$$\vec{v}_1 = \omega d_1\, \hat{e}_\phi$$

$\Rightarrow$ $\vec{L}_O = m\omega(d_1^2 + d_2^2)\hat{e}_z$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = mg(d_1 + d_2)\,\hat{e}_\phi$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = mg(d_1 + d_2)\,\hat{e}_\phi$

$\Rightarrow$ $\vec{L}_O$ veut tourner autour de $\hat{e}_r$
(il faut un torque contraire pour éviter la rotation)

Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/669 Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/17

7.3 Système à l'équilibre (statique)

- Un système est à l'équilibre si:

$$\begin{cases} \vec{r}_\alpha(t) = \text{constante} \\ \vec{v}_\alpha(t) = 0 \end{cases}$$

- pour tout point α du système
- pour chaque instant t

- Dans ce cas on a: [pour tout point O du référentiel]

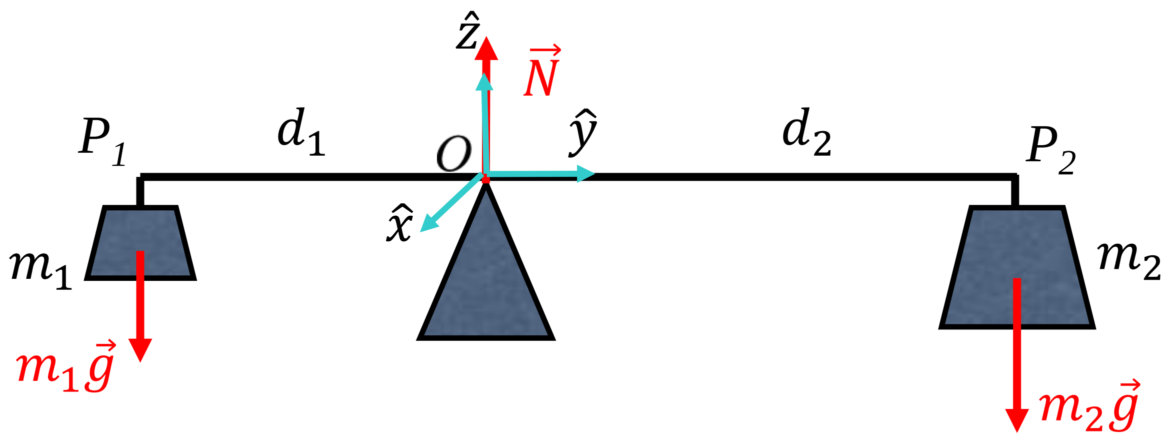
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = 0 \\ \vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \end{matrix}}$$

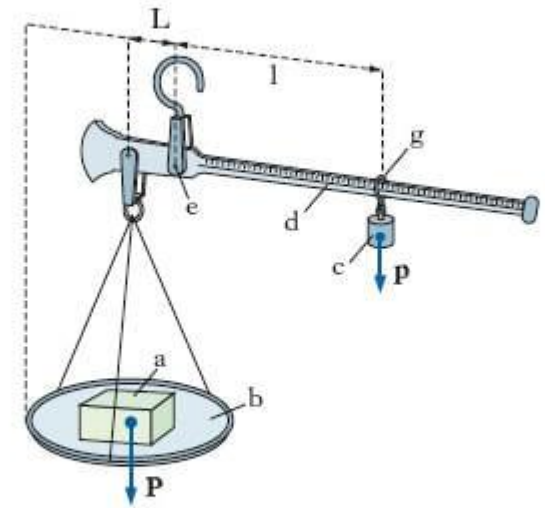
Conditions d'équilibre
pour un système de points matériels
(en particulier pour un solide indéformable)

$\vec{M}_O^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}$ avec $\vec{r}_i$ = point d'application de la force $\vec{F}_i^{ext}$

démo: balances

7.3 Ex.: balance en équilibre





Balance romaine

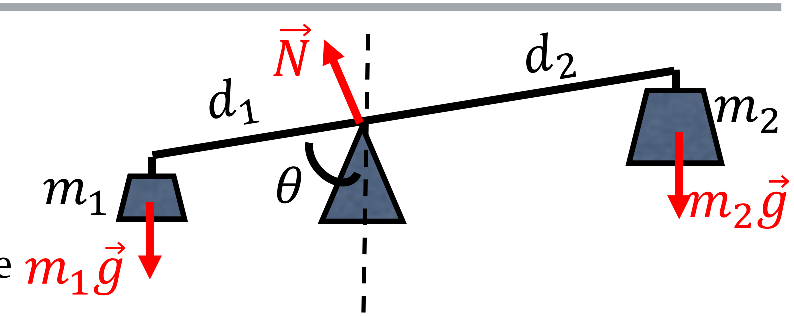
A l'équilibre:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{N} + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{N} = -(m_1 + m_2)\vec{g}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{g} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{N} = \; d_1 m_1 g - d_2 m_2 g = 0$$

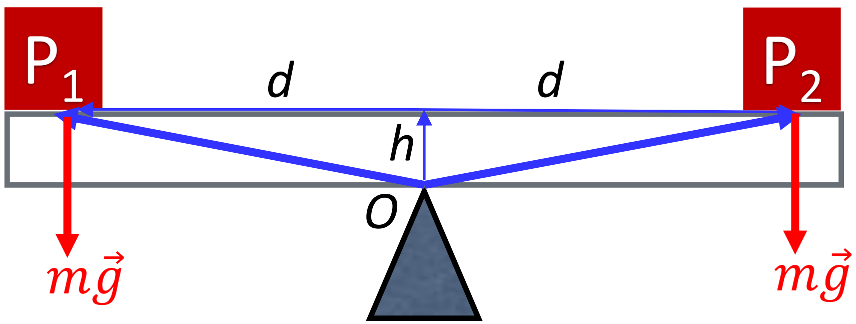
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

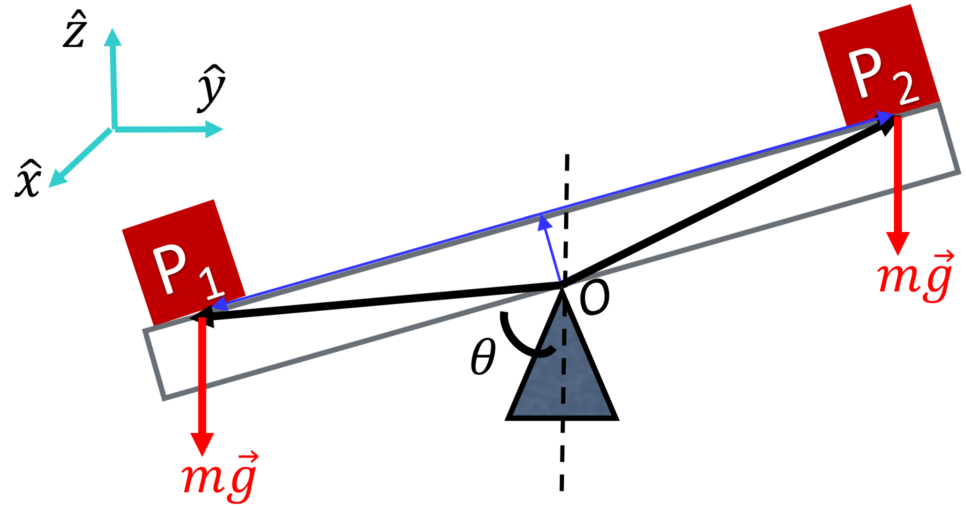
Curiosité: on trouve
$d_1 m_1 = d_2 m_2$ aussi pour
une balance inclinée !!!
Pourquoi on dit que les
deux masses sont identique
quand une balance
est horizontale?



$$d_1 \sin\theta \, m_1 g - d_2 \sin\theta \, m_2 g = 0$$

7.3 Pourquoi une balance en équilibre est horizontale?

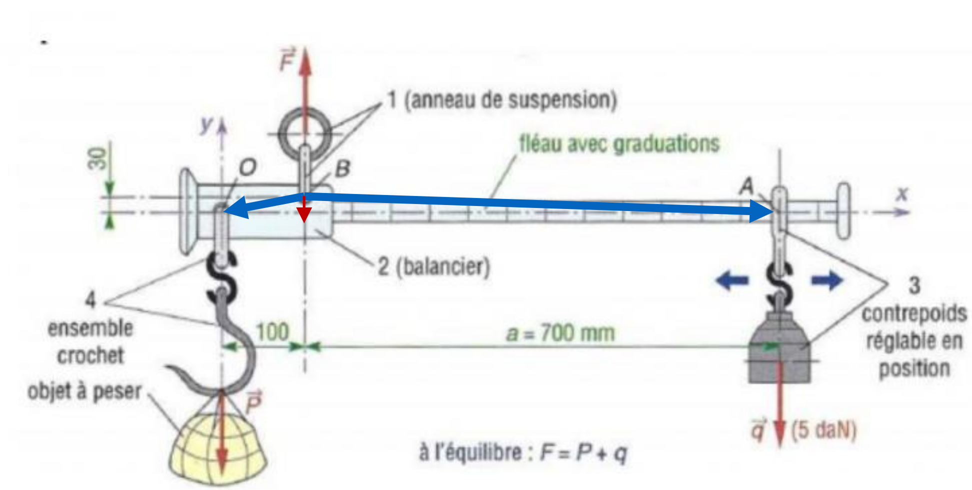




Par construction le point de rotation n'est pas exactement aligné avec le point de application des forces sur les bras:

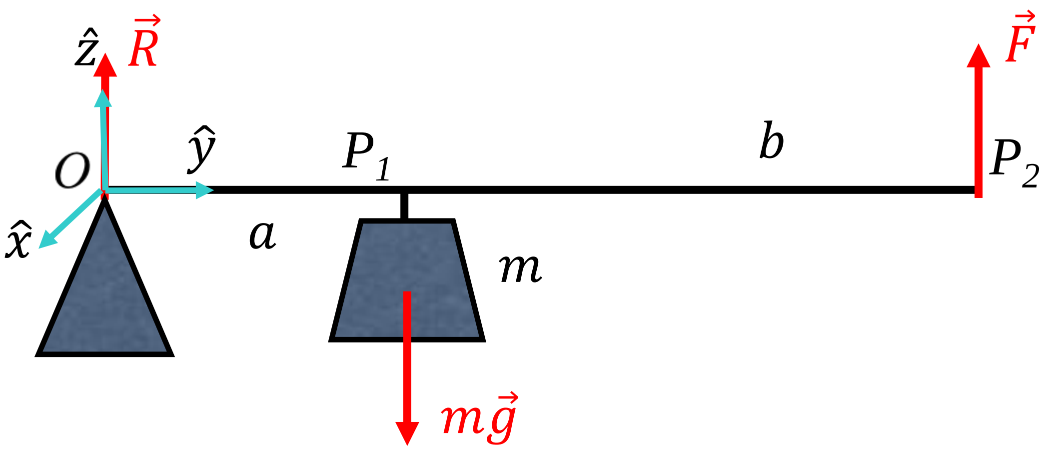
Horizontale: $\vec{M}_O^{ext} = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = -d\hat{y} \wedge m\vec{g} + h\hat{z} \wedge m\vec{g} + d\hat{y} \wedge m\vec{g} + h\hat{z} \wedge m\vec{g} = 0$

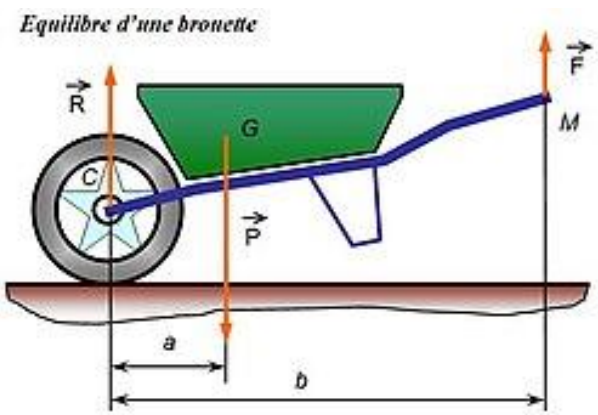
Inclinée:
$$\begin{aligned}\vec{M}_O^{ext} &= \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} \\ &= -\hat{d} \wedge m\vec{g} + (h\sin\theta\,\hat{z} + h\cos\theta\,\hat{y}) \wedge m\vec{g} \\ &+ \hat{d} \wedge m\vec{g} + (h\sin\theta\,\hat{z} + h\cos\theta\,\hat{y}) \wedge m\vec{g} \\ &= -2h\cos\theta\, mg\hat{x}\end{aligned}$$



Ce moment des forces génère un $\vec{L}_O = -L_O\hat{x}$ donc une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre

7.3 Ex.: brouette en équilibre





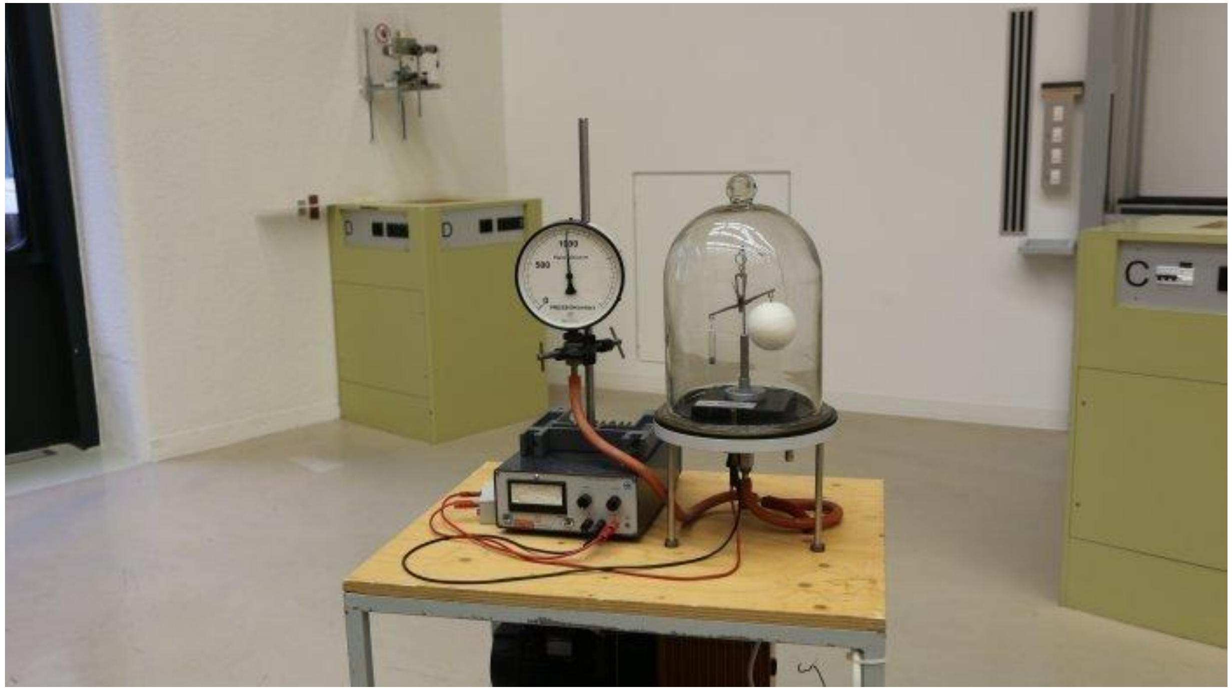
A l'équilibre:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad R + F = mg$$

$$\vec{M}_O^{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} = amg - bF = 0$$

$$F = \frac{a}{b} mg < mg$$

7.3 Ex.: baroscope



Une masse de plomb de petite taille est relié par un tige à une masse de Sagex (polystyrène) de grande taille. La tige est suspendue par son centre.
Dans l'air le système est à l'équilibre. Que se passe-t-il dans le vide ?

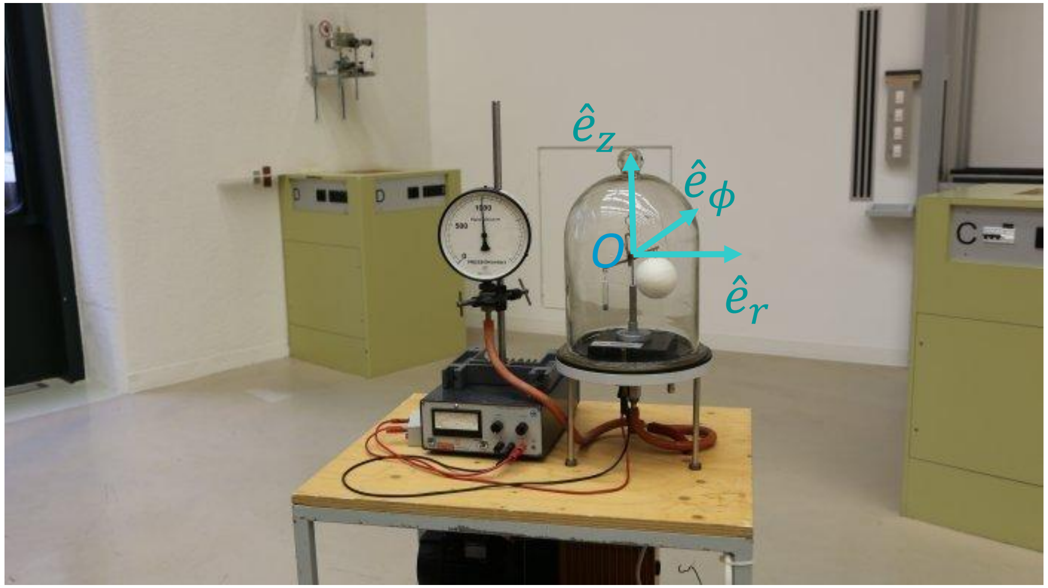
1) Le système reste à l'équilibre

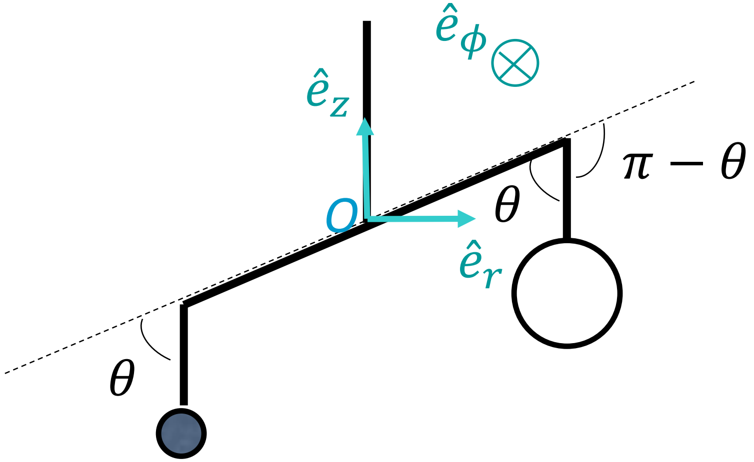
2) La boulle de polystyrène monte et celle de plomb descende

3) La boulle de polystyrène descende et celle de plomb monte

https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/179

7.3 Ex.: baroscope





Chaque masse est soumise à la force de gravité et à la poussée d'Archimède:

Pour chaque masse:

$$\mathrm{m}\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{g} - \rho V\vec{g}$$

ρ est la densité du fluide
V le volume deplacé

Dans l'air: $\vec{M}_O^{ext} = 0 \quad (condition\ d'equlibre)$

$$(m_p g - \rho_a V_p g) d_p \sin\theta = (m_s g - \rho_a V_s g) d_s \sin\theta \Rightarrow m_p = m_s - \rho_a (V_s - V_p) \qquad (d_p = d_s = d)$$

Dans le vide:
$\vec{F}_A = 0$
$(\rho_v = 0)$

$$M_O^{ext} = (m_s g - m_p g) d \sin\theta = (m_s - m_s + \rho_a (V_s - V_p)) g d \sin\theta = \rho_a (V_s - V_p) g d \sin\theta > 0$$

$\Rightarrow$ La boule de plomb monte et celle de Sagex descend à cause du changement du moment des forces

$$\vec{M}_O^{ext} = \rho_a (V_s - V_p) g d \sin\theta\, \hat{e}_\phi = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$d\vec{L}_O = \vec{L}_O(dt) - \vec{L}_O(0) = \vec{L}_O(dt) = \vec{M}_O^{ext} dt$$

7.4 Lois de conservation pour un système isolé

- Pour un système isolé (aucune force de l'extérieur) $\Rightarrow$ $\vec{F}^{ext} = 0$; $\vec{M}_O^{ext} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \vec{F}^{\text{ext}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0 & \Rightarrow & \vec{p} = \text{constante} \\ \vec{M}_O^{ext} = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 & \Rightarrow & \vec{L}_O = \text{constante} \end{array}}$$

par rapport à n'importe quel point O du référentiel

- Pour un système partiellement isolé selon une direction fixe $\hat{u}$:

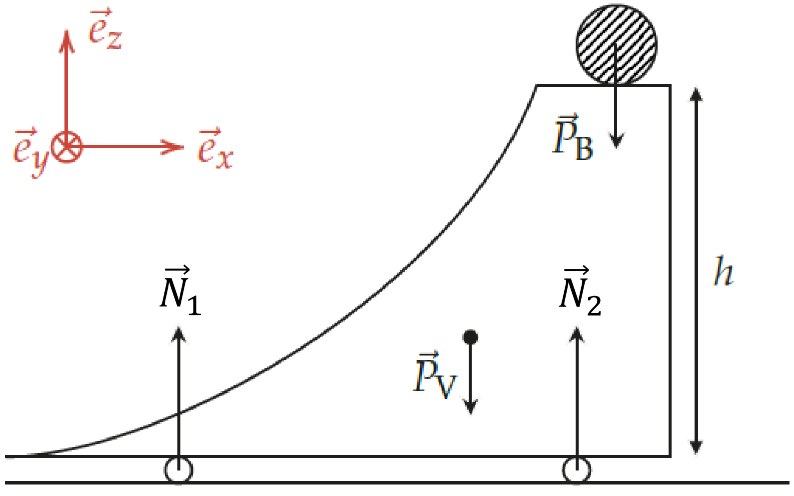
$$\vec{F}^{\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

$$\vec{M}_O^{ext} \cdot \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

- Si forces conservatives: E = constante

Permettent de résoudre de façon simple certains problèmes complexes

7.4 Ex: voiture à boulet



$\vec{P}_V = m_V \vec{g}$
$\vec{P}_B = m_B \vec{g}$

On fait rouler le boulet vers le bas, que fait la voiture?

Forces externes sont verticales

$$\Rightarrow \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \hat{e}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_x = cte$$

$$m_B \vec{v}_{Bx} + m_V \vec{v}_{Vx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{Bx} = -\frac{m_V \vec{v}_{Vx}}{m_B}$$

Force de pesanteur est conservative $\Rightarrow E = K_B + K_V + V_B + V_V = cte$

$$m_B g h = \frac{1}{2} m_B v_{Bx}^2 + \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2$$

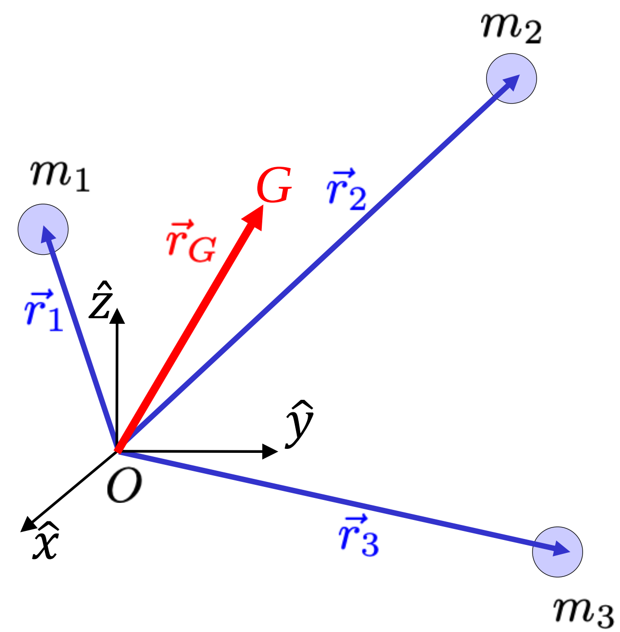
$$m_B g h = \frac{1}{2} m_B v_{Vx}^2 \frac{m_V^2}{m_B^2} + \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2 = \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2 (1 + \frac{m_V}{m_B}) \quad \Rightarrow \quad v_{Vx}^2 = 2gh \frac{m_B}{m_V (1 + \frac{m_V}{m_B})}$$

$$\text{Si } m_B = m_V \quad \Rightarrow \quad v_{Vx} = \sqrt{gh}$$

https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/113

7.5 Centre de masse (ou d'inertie, ou « de gravité »)

- Le centre de masse d'un système à plusieurs corps est un point G de l'espace défini par:



$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}$$

- Si les masses m_α sont constantes, la vitesse du centre de masse est

$$\frac{\vec{p}_G}{M} = \vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\vec{p}}{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_G = M\vec{v}_G = \vec{p}$$

$$\boxed{\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_G}{dt} = M\vec{a}_G = M\ddot{\vec{r}}_G}$$

Théorème du centre de masse

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_G}{dt} = M\frac{d\vec{v}_G}{dt} = M\vec{a}_G$$

Le **centre de masse** d'un système se comporte (pour la 2ème loi de Newton) **comme un point matériel** de masse $M = \sum m_\alpha$ subissant toutes les forces extérieures appliquées sur les différentes parties du système, comme si ces forces étaient exercées sur ce point matériel

démo: recherche du centre de gravité + balistique

7.5 Propriétés du centre de masse (CM)

- Soit G (G') le centre de masse défini à partir de l'origine O (O'), on a que:

$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \overrightarrow{O'P}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}_\alpha\right) = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O'G}$$

$$\Downarrow$$

$G' = G \Rightarrow$ le centre de masse est indépendant de l'origine

- Référentiel $R^*(G\,\hat{x}_G\hat{y}_G\hat{z}_G)$ du CM i.e. origine placée en G et en mouvement avec G:

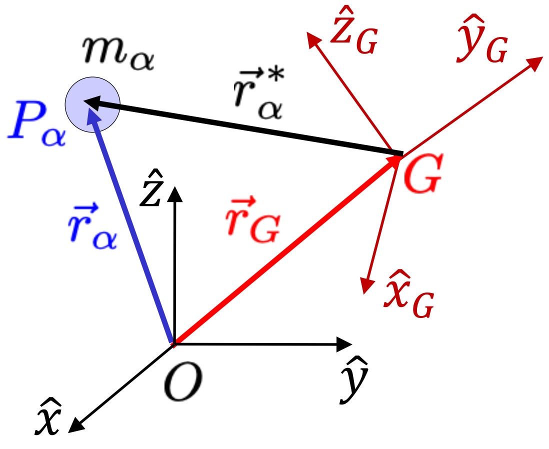
$$\vec{r}_\alpha^{\,*} = \overrightarrow{GP}_\alpha = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}_\alpha = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OP}_\alpha = -\vec{r}_G + \vec{r}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_\alpha = \vec{r}_G + \vec{r}_\alpha^{\,*}$$

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{r}_G + \vec{r}_\alpha^{\,*}) = \vec{r}_G + \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^{\,*} \quad \Rightarrow \quad \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^{\,*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha^{\,*}}{dt} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^{\,*} = 0 \\ &\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,*} = 0 \;\text{ où }\; \vec{v}_\alpha^{\,*} = \frac{d\vec{r}_\alpha^{\,*}}{dt} = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_G \end{aligned}}$$

La somme des quantités de mouvement par rapport au centre de masse est nulle



7.5 centre de masse et moment cinétique

- Moment cinétique par rapport à O: $\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha$

Par rapport à un point A on a:

$$\vec{L}_A = \sum_\alpha \overrightarrow{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}_\alpha) \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \overrightarrow{AO} \wedge \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha + \sum_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha \Rightarrow$$

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_O$$

- Théorème du transfert: $\boxed{\vec{L}_G = \vec{L}^*_G}$

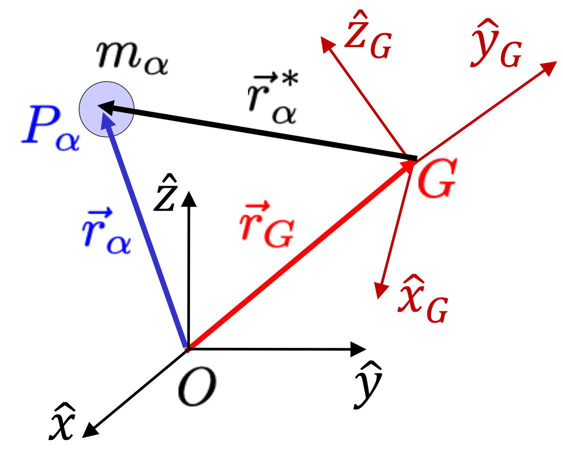
$\vec{L}^*_G$ est le moment cinétique calculé dans le référentiel du CM $G\ \hat{x}_G \hat{y}_G \hat{z}_G$

$$\vec{L}_G = \sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha \wedge m_\alpha (\vec{v}^*_\alpha + \vec{v}_G) = \sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}^*_\alpha + \left(\sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha m_\alpha\right) \wedge \vec{v}_G = \vec{L}^*_G + 0 = \vec{L}^*_G$$

$$\left(\sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha m_\alpha\right) = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}^*_\alpha = 0$$

- 1er Théorème de König: $\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}^*_G}$

Le moment cinétique totale par rapport à O est égale à la somme du moment cinétique de la masse totale M concentrée en CM et du moment cinétique calculé par rapport au CM



7.5 centre de masse et moment cinétique

- Evolution du moment cinétique par rapport à O: $\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G^*$

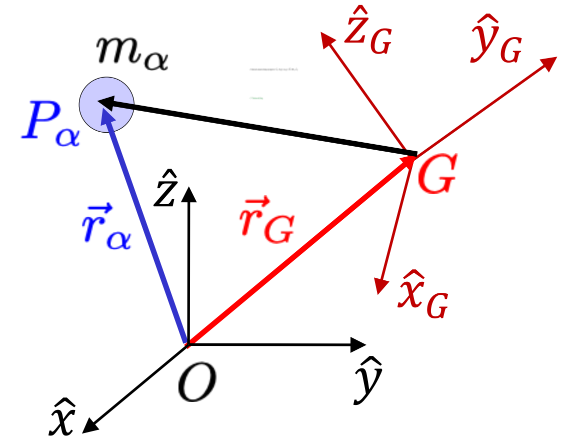
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \frac{d\vec{L}_G^*}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{M}_O^{ext} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + {\vec{M}_G^{ext}}^*}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\overrightarrow{OG}} \wedge M\vec{v}_G + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{a}_G + \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$
$$= \vec{v}_G \wedge M\vec{v}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$
$$= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_G^{ext} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + {\vec{M}_G^{ext}}^*$$

- 2er Théorème de König: $$\boxed{K = K^* + \frac{1}{2}Mv_G^2}$$

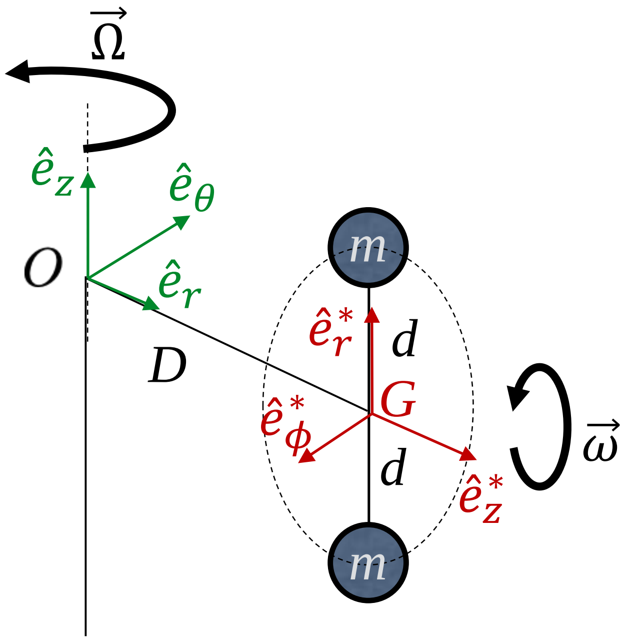
> L'énergie cinétique totale par rapport à un point O est égale à la somme de l'énergie cinétique du CM et l'énergie cinétique du mouvement relatif autour du CM



$$K = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{v}_\alpha^* + \vec{v}_G)^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha({v_\alpha^*}^2 + v_G^2 + 2\vec{v}_\alpha^* \cdot \vec{v}_G) =$$
$$K^* + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha v_G^2 + \underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha^*\right)}_{=0} \cdot \vec{v}_G = K^* + \frac{1}{2}M\, v_G^2$$

7.5 Ex.: deux balles tournantes autour de deux axes

Axes sans masse



$M = 2m$

$\overrightarrow{OG} = D\hat{e}_r$

$\vec{v}_G = \Omega\hat{e}_z \wedge D\hat{e}_r = D\Omega\hat{e}_\theta$

$\vec{v}_m^* = \omega\hat{e}_z^* \wedge d\hat{e}_r^* = \omega d\hat{e}_\phi^*$

$$\vec{L}_G^* = d\hat{e}_r^* \wedge m\vec{v}_m^* + (-d\hat{e}_r^* \wedge -m\vec{v}_m^*) = 2md^2\omega\hat{e}_r^* \wedge \hat{e}_\phi^* = 2md^2\omega\hat{e}_z^*$$

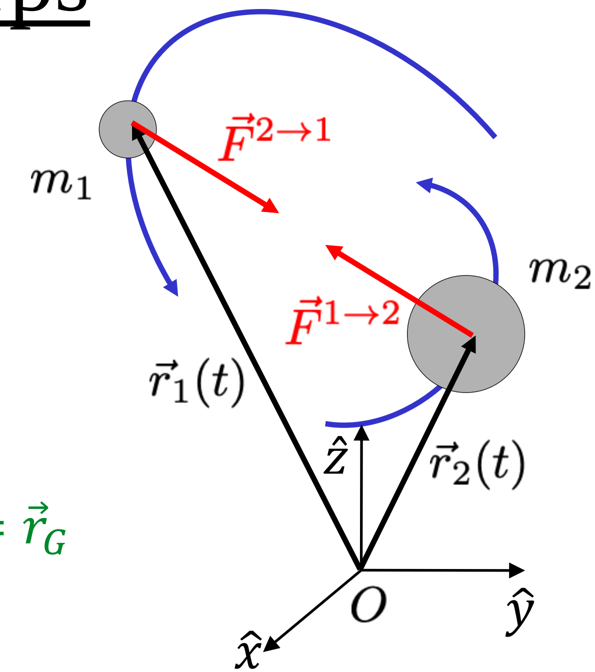
1er Théorème de König:

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G^* = D\hat{e}_r \wedge MD\Omega\hat{e}_\theta + \vec{L}_G^* = MD^2\Omega\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\theta + \vec{L}_G^* =$$

$$= MD^2\Omega\hat{e}_z + 2md^2\omega\hat{e}_z^* = MD^2\Omega\hat{e}_z + 2md^2\omega\hat{e}_r$$

7.6 System isolé à deux corps

Deux descriptions possible:



- Référentiel $(O\hat{x}\hat{y}\hat{z})$: coordonnées $\vec{r}_1$; $\vec{r}_2$

$$\begin{cases} \vec{F}_{2\to1} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 & (1) \\ \vec{F}_{1\to2} = m_2\ddot{\vec{r}}_2 & (2) \end{cases}$$

(3ème loi)

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$$

- Référentiel du centre de masse $(G\hat{x}\hat{y}\hat{z})$: coordonnées $\vec{r}$; $\vec{R} = \vec{r}_G$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Théorème du centre de masse $\Leftrightarrow$ $(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext} = 0$ $\Leftrightarrow$ $m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_1\ddot{\vec{r}}_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ (3ème loi)

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{2\to1}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{1\to2}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{2\to1} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)\vec{F}_{2\to1}$$

$$\Downarrow$$

Equation du mouvement relatif $\quad \vec{F}_{2\to1} = \mu\ddot{\vec{r}}$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

μ = masse réduite du système

$$M = m_1 + m_2$$

M = masse totale du système

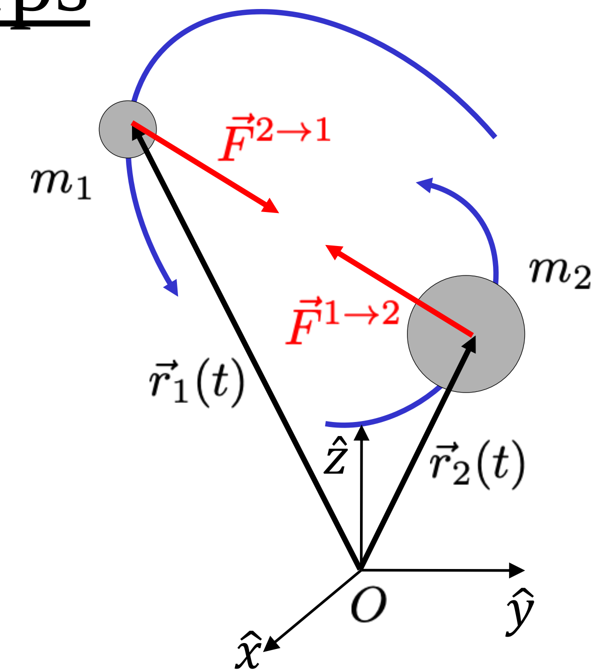
7.6 System isolé à deux corps

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext} = 0 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{F}_{2\to 1} = \mu\ddot{\vec{r}}$$

$$M = m_1 + m_2$$

Equivalente à étudier le mouvement de deux particules indépendantes de masse M et μ



$\vec{r}_1$et $\vec{r}_2$ sont obtenus à partir de $\vec{r}$ et $\vec{R}$

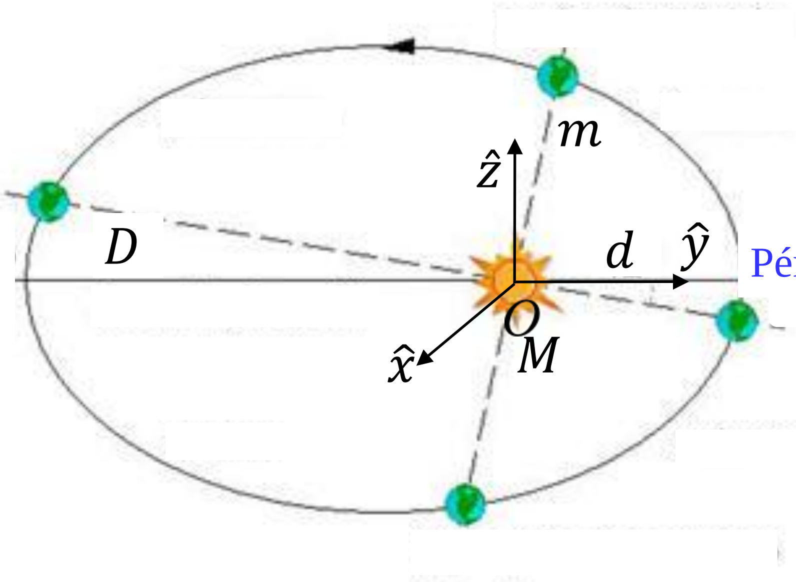
$$(m_1 + m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \qquad (m_1 + m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_1 - \vec{r})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

7.6 Ex.: CM de Soleil - Terre



Masse Soleil $M_S = 2\ 10^{30}$ kg
Masse Terre m = $6\ 10^{24}$ kg
D = $152\ 10^{6}$ km
d = $147\ 10^{6}$ km
Rayon Soleil $R_S = 7\ 10^{5}$ km

$$M = m_1 + m_2 = m + M_S \approx M_S$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m M_S}{m + M_S} \approx m$$

Position du CM: par ex. avec Terre à l'Apogée par rapport au référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ centré sur le Soleil

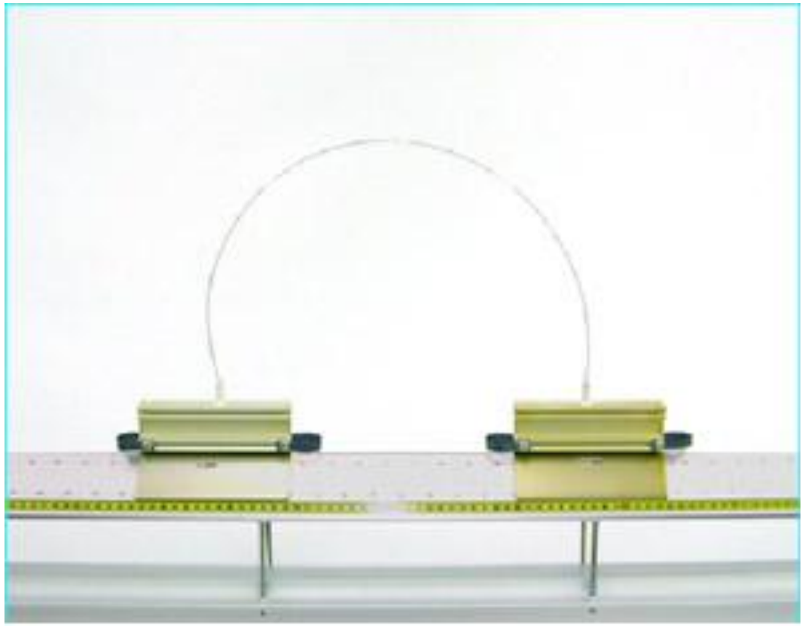
$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-mD}{m + M_S} \approx -\frac{mD}{M_S} \approx -450\ km$$

Le CM est à l'intérieur de la surface du Soleil

$$\vec{F}_{ext} = M\ddot{\vec{R}}$$

En absence de forces extérieures, le CM de Terre et Soleil se déplace à vitesse constante.
Avec une très bonne approximation, le Soleil est le CM du système Soleil – Terre et donc la Terre tourne autour du Soleil

7.6 Ex.: deux chariots reliés par un ressort



On donne une poussée vers gauche au chariot de droite: après la poussée, quel mouvement suivra le centre de masse du système (pas de frottement)?

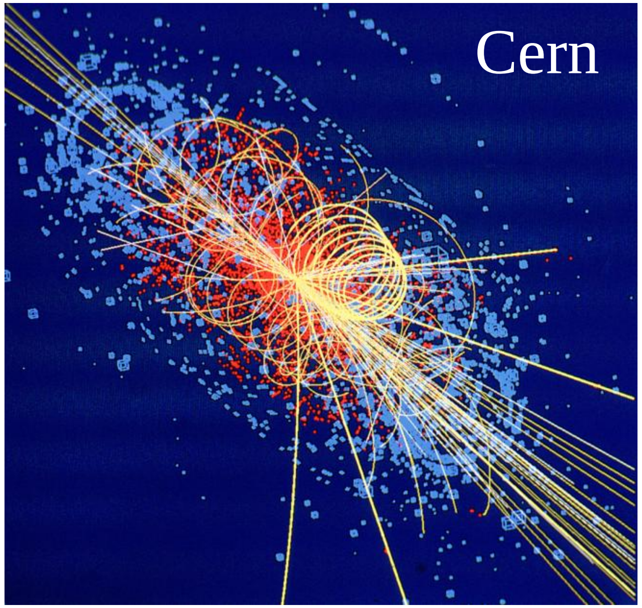
1) Déplacement rectiligne uniforme vers gauche

2) Oscillatoire sans déplacement

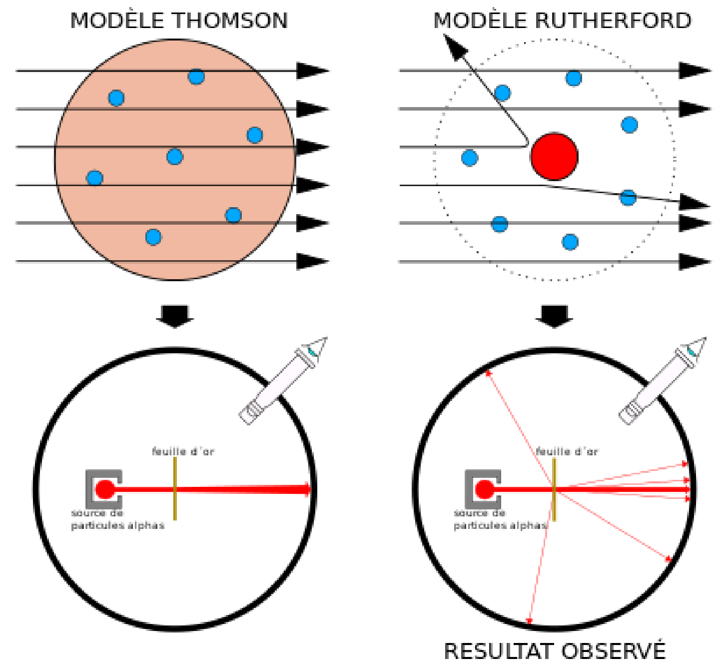
3) Oscillatoire avec déplacement vers gauche

https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/764

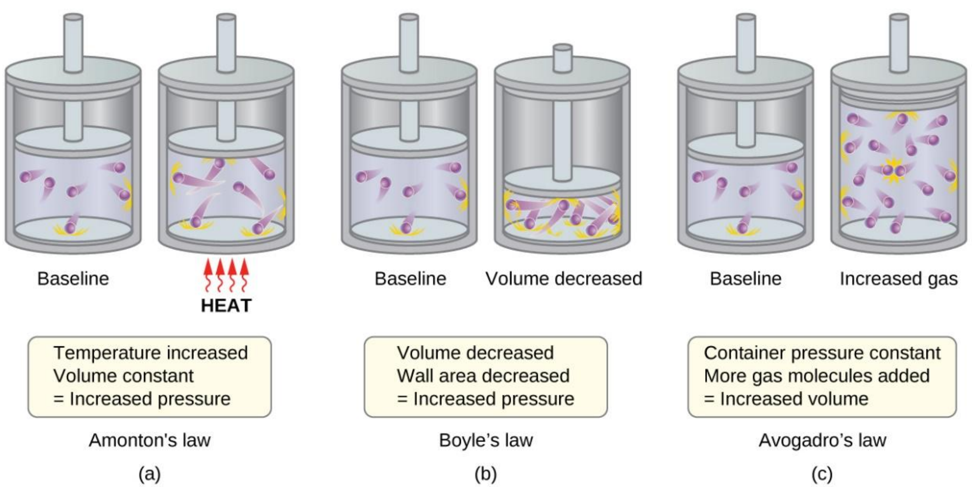
7.7 Collisions: exemples



Experience de Rutherford: Source Wikipedia



Collisions entre particules d'un gaz



Vie quotidienne

7.7 Collisions entre deux corps

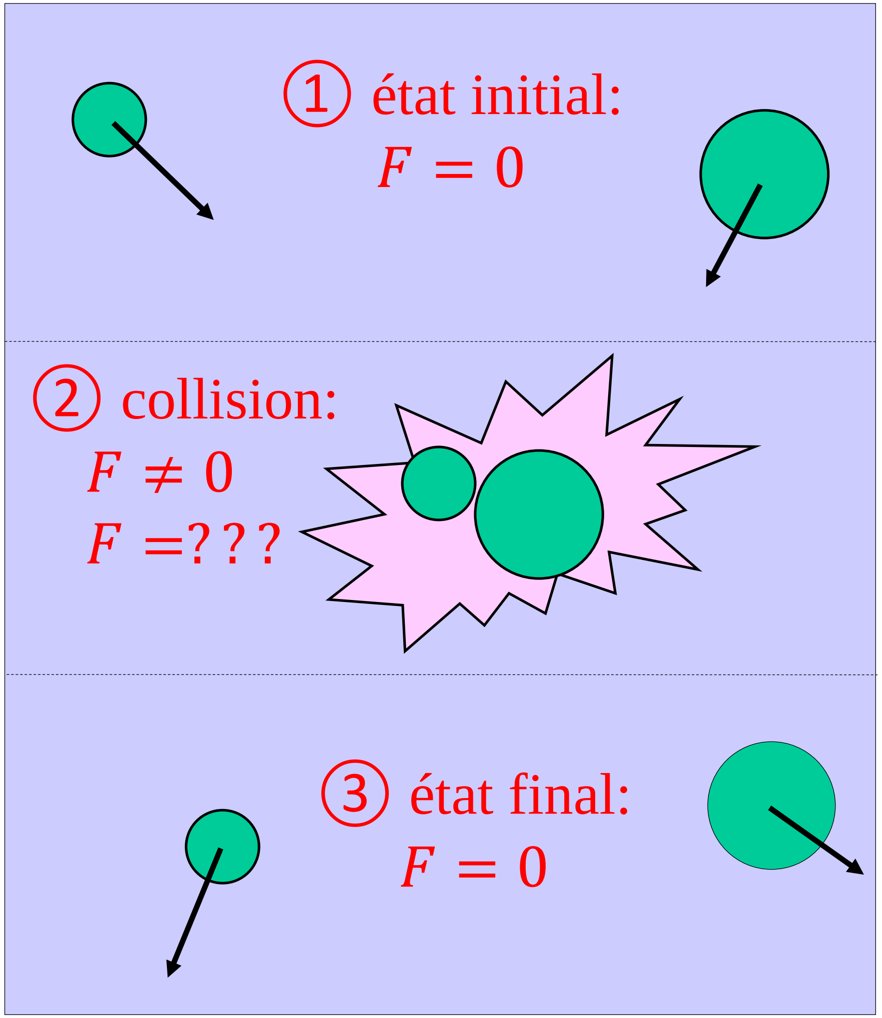
- Peuvent être analysés sur la base des lois de conservation et permettent d'étudier les forces en jeu

- Modélisation: le système des deux corps est isolé ou partiellement isolé $\Rightarrow$ $\vec{p} \cdot \hat{u}$ = constante, $\vec{L}_O \cdot \hat{u}$ = constante

(1) Bien avant le choc ($t \ll 0$):
  - Les corps n'exercent aucune force l'un sur l'autre (ils sont très éloignés et on suppose une force à courte portée)
  - Chaque corps est un système isolé

(2) Pendant le choc ($t \simeq 0$):
  - Les corps interagissent, sous l'effet d'une force F (qu'on ne décrit pas)

(3) Bien après le choc ($t \gg 0$):
  - Les corps sont à nouveau libres



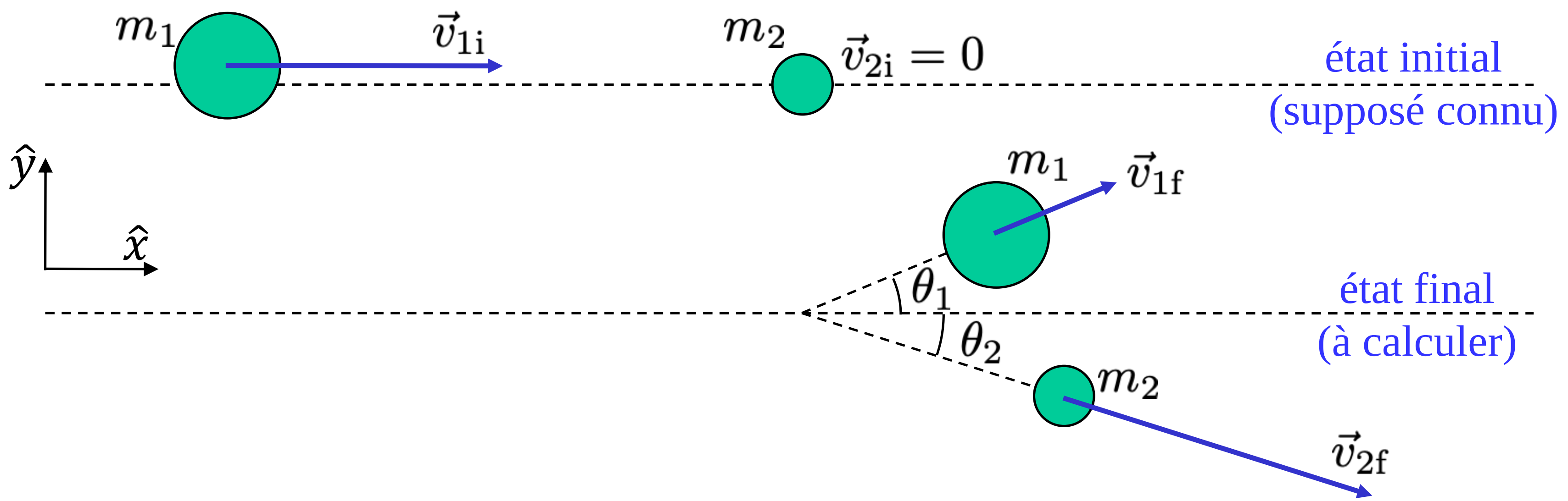
état initial ≠ état final: les corps ont échangé, entre autres, de la quantité de mouvement:

$$\Delta\vec{p} = \int_{\text{choc}} \vec{F} dt = \text{impulsion}$$

démo: mesure de la durée d'un choc

7.7 Collision entre deux points matériels isolés

- On choisit, sans perte de généralité, un référentiel dans lequel l'une des deux boules est initialement au repos



- Conservation de la quantité de mouvement:

$$\boxed{m_1\vec{v}_{1\mathrm{i}} = m_1\vec{v}_{1\mathrm{f}} + m_2\vec{v}_{2\mathrm{f}}}$$

$\Rightarrow$ toutes les vitesses sont dans un même plan

Projections selon $\hat{x}$ et $\hat{y}$

$$\begin{cases} m_1 v_{1\mathrm{i}} &= m_1 v_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1 + m_2 v_{2\mathrm{f}} \cos\theta_2 \\ 0 &= m_1 v_{1\mathrm{f}} \sin\theta_1 - m_2 v_{2\mathrm{f}} \sin\theta_2 \end{cases}$$

- Variation d'énergie cinétique totale :

$$Q \equiv K_{\mathrm{final}} - K_{\mathrm{initial}} = \underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_{1\mathrm{f}}^2}_{K_{1\mathrm{f}}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_2 v_{2\mathrm{f}}^2}_{K_{2\mathrm{f}}} - \underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_{1\mathrm{i}}^2}_{K_{1\mathrm{i}}}$$

7.7 Collision élastique: énergie cinétique conservée

- Conservation de la quantité de mouvement:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\cos\theta_2$$

$$0 = m_1 v_{1f}\sin\theta_1 - m_2 v_{2f}\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow$$

$$(m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f}\cos\theta_1)^2 = (m_2 v_{2f}\cos\theta_2)^2$$

$$m_1^2 v_{1f}^2 \sin^2\theta_1 = m_2^2 v_{2f}^2 \sin^2\theta_2 = m_2^2 v_{2f}^2 (1-\cos^2\theta_2)$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f}\cos\theta_1)^2 = m_2^2 v_{2f}^2 - m_1^2 v_{1f}^2 \sin^2\theta_1$$

- Choc élastique: $\Leftrightarrow$ $Q = 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$ $\quad\Rightarrow\quad$ $v_{2f}^2 = \frac{m_1}{m_2}(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$

$$m_1^2 v_{1i}^2 + m_1^2 v_{1f}^2\cos^2\theta_1 - 2m_1^2 v_{1i} v_{1f}\cos\theta_1 = m_1 m_2 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) - m_1^2 v_{1f}^2 \sin^2\theta_1$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 v_{1i}^2 + m_1 v_{1f}^2 - 2m_1 v_{1i} v_{1f}\cos\theta_1 = m_2 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$$

$$\Downarrow$$

$$v_{1f}^2 (m_1 + m_2) + v_{1i}^2 (m_1 - m_2) - 2m_1 v_{1i} v_{1f}\cos\theta_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2} - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \frac{v_{1f}}{v_{1i}} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

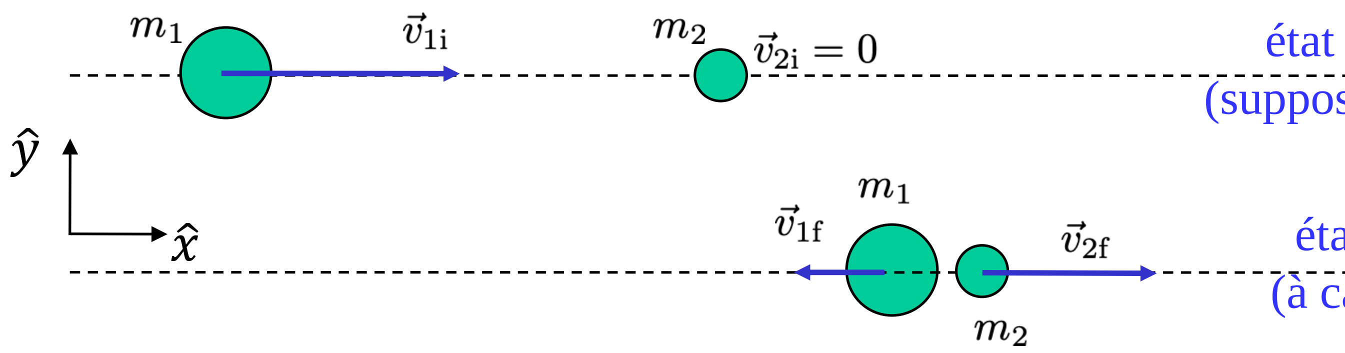
$$\Delta = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2\theta_1 - 4\frac{m_1^2 - m_2^2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$= \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left(\cos^2\theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}}\right)$$

7.7 Collision élastique unidimensionnelle

- Cas particulier:



état initial
(supposé connu)

état final
(à calculer)

- On obtient: $\dfrac{v_{1f}}{v_{1i}} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\left(1 \pm \dfrac{m_2}{m_1}\right) = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\left(\dfrac{m_1 \pm m_2}{m_1}\right) = \dfrac{m_1 \pm m_2}{m_1+m_2}$

1) $v_{1f} = v_{1i}$ $\qquad v_{2f}^2 = \dfrac{m_1}{m_2}\left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2\right) = 0$ $\qquad$ Pas de choc

2) $v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$ $\qquad v_{2f}^2 = \dfrac{m_1}{m_2}\left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2\right) = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}v_{1i}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}$

- Cas limites:

Si $m_1 = m_2$: $v_{1\mathrm{f}} = 0$ et $v_{2\mathrm{f}} = v_{1\mathrm{i}}$ — échange des vitesses

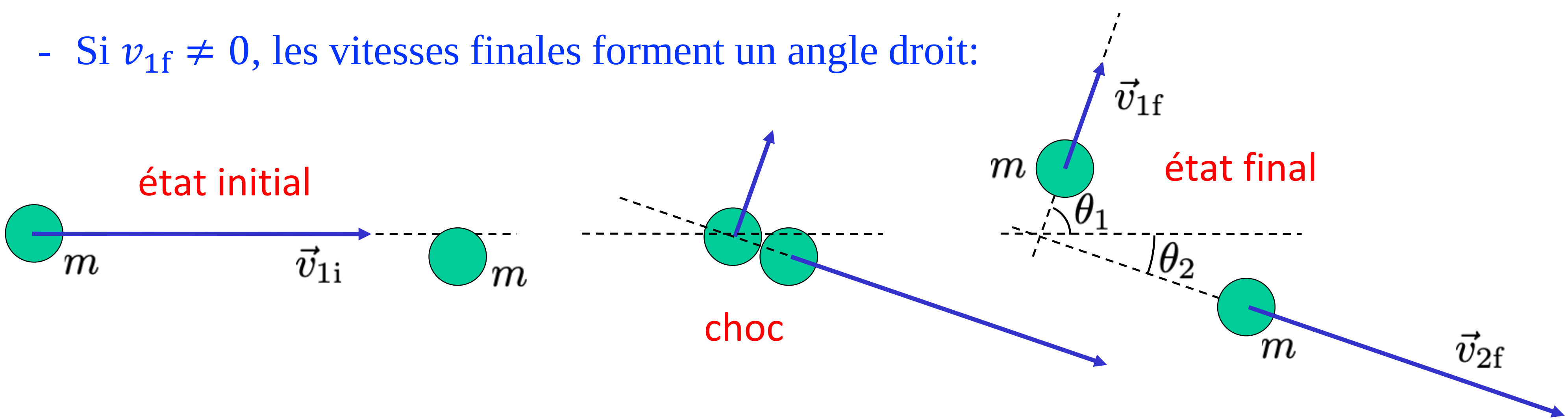
Si $m_1 \ll m_2$: $v_{1\mathrm{f}} \approx -v_{1\mathrm{i}}$ et $v_{2\mathrm{f}} \approx 0$ — rebond sur une masse « infinie »

Si $m_1 \gg m_2$: $v_{1\mathrm{f}} \approx v_{1\mathrm{i}}$ et $v_{2\mathrm{f}} = 2v_{1\mathrm{i}}$ — collision avec masse négligeable

DEMO:https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/766 Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/86

7.7: Choc élastique entre deux points matériels

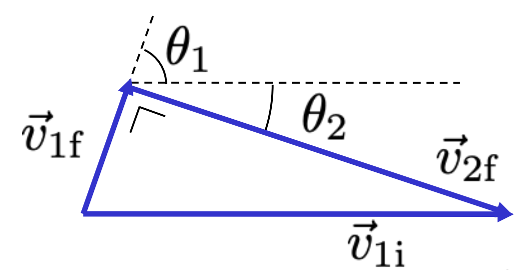
- Cas particulier $m_1 = m_2 = m$ (mais $\vec{v}_{1i}$ n'est pas alignée avec le point 2):
  - Par exemple boules de billard sans frottements (**système partiellement isolé**: $\vec{p} \cdot \hat{x}$ = cste; $\vec{p} \cdot \hat{y}$ = cste; $\vec{L} \cdot \hat{x}$ = cste; $\vec{L} \cdot \hat{y}$ = cste; en direction $\hat{z}$: poids + réaction table)
  - On obtient: $$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{1}{2}\left(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1}\right) \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = 0 : \text{ échange des vitesses} \\ v_{1f} = v_{1i}\cos\theta_1 \end{cases}$$
  - Si $v_{1f} \neq 0$, les vitesses finales forment un angle droit:



conservation de $\vec{p}_{tot}$: $\quad \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \quad \Rightarrow$ triangle

conservation de K_{tot} : $\quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad \Rightarrow$ triangle rectangle

$$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$



démo: table à air

7.7 Collision inélastique

- Définition choc inélastique: énergie cinétique non conservée
  - Q > 0: la collision dégage de l'énergie cinétique (exo-énergétique)
  - Q < 0: la collision absorbe de l'énergie cinétique (endo-énergétique)

- variation d'énergie interne du système = - Q
  (par conservation de l'énergie totale):
  - elle peut conduire à un changement de l'identité des particules en interaction, ou du nombre de particules dans l'état final; exemples:
    - Choc entre un marteau et un verre de cristal
    - Collisions entre particules élémentaires, par ex. $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$

- Cas particulier: choc mou (les deux points matériels restent accrochés): $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{V}$

Conservation de la quantité de mouvement: $m_1\vec{v}_{1i} = (m_1 + m_2)\vec{V} \;\Rightarrow\; \vec{V} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}$

$\vec{V}$ = Vitesse du centre de masse

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{{m_1}^2}{m_1 + m_2} - m_1\right)v_{1i}^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_{1i}^2 < 0$$

Energie cinétique transformée en chaleur lors du choc

démo: rail à air